

15/5/17

Δ Ασκηση: Για ποιες τιμές των a, b, γ ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ a & b & \gamma \end{pmatrix}$$

παραμένει γραμμική συνάρτηση (n) ως προς άξονα

(Ε) κάθετο στο επίπεδο (n);

Λύση: i) $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ✓

ii) A ορθογώνιος: $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$ ✓

$$\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{9}{9}} = 1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = 0$$
 ✓

$$\frac{1}{\sqrt{2}} a + \frac{1}{\sqrt{2}} b + 0 \gamma = 0$$

$$\frac{2}{3} a + \left(-\frac{2}{3}\right) b + \frac{1}{3} \gamma = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + \gamma^2 = 1$$

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ 2a - 2b + \gamma &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Άρα } \begin{cases} a + b = 0 \\ \gamma = 4t \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a &= -t \\ b &= t \\ \gamma &= 4t \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} a \\ b \\ \gamma \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{18}$$

$$a = -1/\sqrt{18} \quad \text{ή} \quad a = 1/\sqrt{18}$$

$$b = 1/\sqrt{18}$$

$$b = -1/\sqrt{18}$$

$$\gamma = 4/\sqrt{18}$$

$$\gamma = -4/\sqrt{18}$$

①

Από το Euler όμως δέλω $\det A = 1$

Ελέγχω για τις τιμές:

$$\det \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ -1/\sqrt{8} & 1/\sqrt{18} & 4/\sqrt{18} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{18}} (-8 - 1 - 1 - 8) \stackrel{=-1}{=} < 0$$

Άρα για να ισχύει $\det A = 1$ έχουμε $\alpha = \frac{1}{\sqrt{18}}$, $\beta = -\frac{1}{\sqrt{18}}$ και $\gamma = -\frac{4}{\sqrt{18}}$

Φασματικό Θεώρημα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ συμμετρικός πίνακας.

Τότε υπάρχει ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n \times 1}$ που να αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A .

Άρα ο A είναι διαγωνίσιμος και $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1} & \\ & P \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ ορθογώνιος

Ασκ. 2 Φυλλάδιο #7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Να βρεθεί ορθογώνιος πίνακας P έτσι ώστε $P^t A P$ διαγωνίσιμος.

Λύση: $A^t = A$ (συμμετρικός)

Φασματικό Θεώρημα $\Rightarrow A$ διαγωνίσιμος

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} \xrightarrow{r_3 \rightarrow r_3 - r_1} \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ x-1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$(1-x) \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 0 \\ -1 & 2-x & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-x) ((x-1)(x-2) - 1 - 1) =$$

$$= -(x-1)(x^2 - 3x) = -(x-1)x(x-3)$$

$$V(1) = \{ X \in \mathbb{R}^{3 \times 1} \mid (A - I)X = 0_{3 \times 1} \}$$

$$(A - I | 0) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-r_2 \\ -r_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = -t \\ y = 0 \\ z = t \end{array}$$

Το $V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ δα αντιστοιχεί σε
ορθοκανονική βάση άρα διαγράφουμε με το μέτρο του

$$\text{Άρα } V(1) = \left\langle \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V(0) = \{x \in \mathbb{R}^{3 \times 1} / (A - 0I)x = 0\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$V(0) = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$V(3) = \{x \in \mathbb{R}^{3 \times 1} / (A - 3I)x = 0\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$V(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \Delta \text{ ναίμω με το μέτρο άρα } V(3) = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = P^t \quad A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{3} & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

► Πως θα είναι ο συρτήρας του A_j

$$z \in \mathbb{C}$$

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Ο συρτήρας του z είναι ο $\bar{z} = x - iy$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

Ορισμός: Έστω V ένας $\mathbb{C}$ -δανυσματικός χώρος. Εσωτερικό γινόμενο στον V είναι μια απεικόνιση $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$
 $(\vec{a}, \vec{b}) \rightarrow \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ για κάθε

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{\gamma} \in V$ και $\kappa, \lambda \in \mathbb{C}$.

$$i) \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \overline{\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle}$$

$$ii) \langle \kappa \vec{a} + \lambda \vec{b}, \vec{\gamma} \rangle = \kappa \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle + \lambda \langle \vec{b}, \vec{\gamma} \rangle \quad (\text{γραμμική})$$

$$iii) \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \geq 0 \quad \text{και} \quad \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = 0 \quad \text{τότε} \quad \vec{a} = \vec{0}$$

$$(\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \in \mathbb{R})$$

► Ένας $\mathbb{C}$ -δανυσματικός χώρος V εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο λέγεται Ερμιτιανός χώρος.

Παρατηρήσεις: 1) $\langle \vec{a}, \kappa \vec{b} + \lambda \vec{\gamma} \rangle = \langle \kappa \vec{b} + \lambda \vec{\gamma}, \vec{a} \rangle$

$$= \bar{\kappa} \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle + \bar{\lambda} \langle \vec{\gamma}, \vec{a} \rangle = \bar{\kappa} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle + \bar{\lambda} \langle \vec{a}, \vec{\gamma} \rangle$$

$$2) \langle \vec{a}, \kappa \vec{b} \rangle = \bar{\kappa} \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$$

3) $\langle \vec{a}, \vec{a} \rangle = \langle \overline{\vec{a}}, \vec{a} \rangle$ (αλλάζω δέξω τα $\vec{a}$ και παίρνω συζυγή)
 $\Rightarrow \langle \vec{a}, \vec{a} \rangle \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα: Το εὐκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^n$.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ όπου } a_i \in \mathbb{C}$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \text{ όπου } b_i \in \mathbb{C}$$

~~Εύκολα παρατηρούμε~~

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = a_1 \overline{b_1} + a_2 \overline{b_2} + \dots + a_n \overline{b_n}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι ισχύουν και οι τρεις ιδιότητες του ορθογώνιου

$$z \cdot \overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$$

$$\overline{z} = x-iy$$

Ορισμός: Έστω V Εukλείδειος χώρος (ή Ευκλείδειος). Έστω

$\phi: V \rightarrow V$ γραμμική απεικόνιση. Η γραμμική απεικόνιση $\phi^*: V \rightarrow V$ τέτοια ώστε $\langle \phi(\vec{a}), \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \phi^*(\vec{b}) \rangle$ λέγεται συζυγής της ϕ (ή προσαυξημένη της ϕ)

Αν $A = [\phi]_{\gamma}^{\gamma}$ όπου γ ΟΚΒ του V

τότε $[\phi^*]_{\gamma}^{\gamma} = A^* = (\overline{A^t})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n} \quad A^* = \overline{A^t} = \begin{pmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{21}} & \overline{a_{n1}} \\ \overline{a_{12}} & \overline{a_{22}} & \overline{a_{n2}} \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \overline{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα: $A = \begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 3-7i & i \end{pmatrix}$ $A^* = (\overline{A^t}) = \begin{pmatrix} 1-i & 3+7i \\ 2 & -i \end{pmatrix}$

V Ευκλείδειος χώρος

$$A = [\phi]_{\gamma}^{\delta} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \text{ώστε} \quad [\phi^*]_{\gamma}^{\delta} = A^* = A^t$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad A^* = A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{n2} \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Παράδειγμα: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
 $X, Y \in \mathbb{R}^{n \times 1}$

$$\langle X, Y \rangle = \underset{1 \times n}{X^t} \underset{n \times 1}{Y}$$

$$\langle AX, Y \rangle = (AX)^t Y = X^t A^t Y = \langle X, A^t Y \rangle$$

Ορισμός: Μια γραμμική απεικόνιση $\phi: V \rightarrow V$ (V Ευκλείδειος ή Ευκλείδης) λέγεται αυτοπαρασυμμετρική αν $\phi^* = \phi$
 $\langle \phi(\vec{a}), \vec{b} \rangle = \langle \vec{a}, \phi(\vec{b}) \rangle$